Chapitre 3 : Ensembles et applications

Table des matières

1 Ensembles

1.1 Description d'un ensemble

Un ensemble consiste en une collection d'objets, appelés ses éléments, qui peuvent être en nombre fini ou infini. Il existe plusieurs manières de décrire un ensemble.

Description en extension : on dresse la liste de tous les éléments, ou on donne la forme sous laquelle ils s'écrivent. L'ordre et les répétitions n'ont pas d'importance.

Exemples 1.1 :
- L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble constitué de zéro élément.
- L'ensemble $\{0\} = \{0\,;0\,;0\}$ est l'ensemble constitué d'un seul élément : le nombre zéro.
  On dit que c'est un singleton.
- L'ensemble $\{0\,;1\} = \{1\,;0\,;1\}$ est constitué de deux éléments : les nombres 0 et 1.
  On dit que c'est une paire.
- $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;\cdots\}$: ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^* = \{1\,;2\,;3\,;4\,;\cdots\}$: ensemble des entiers naturels strictement positifs.
- $\mathbb{Z} = \{0\,;1\,;-1\,;2\,;-2\,;3\,;-3\,;4\,;-4\,;\cdots\}$: ensemble des entiers relatifs.

Description en compréhension : on donne une propriété qui caractérise les éléments de l'ensemble.

Exemples 1.2 :
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \;/\; p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}^*\right\}$: ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{D} = \left\{\frac{p}{10^n} \;/\; p \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\right\}$: ensemble des nombres décimaux.
- La construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas au programme.
- $\mathbb{C} = \{a + b\,\mathbf{i} \;/\; a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\}$: ensemble des nombres complexes.
- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq 0\}$: ensemble des réels non nuls.
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geqslant 0\}$: ensemble des réels positifs.
- $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > 0\}$: ensemble des réels strictement positifs.
- On définit de manière similaire les ensembles $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}_+$, etc.
- Exemples d'intervalles : $[1\,;\pi[= \{x \in \mathbb{R} \;/\; 1 \leqslant x < \pi\}$ et $]-\infty\,;\pi] = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \leqslant \pi\}$.
- Intervalles d'entiers : pour tous entiers n et m, on note $[\![n\,;m]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \;/\; n \leqslant k \leqslant m\}$.
  Exemple : $[\![0\,;9]\!] = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\}$ (ensemble des chiffres).
  On définit de même les intervalles d'entiers du type $[\![n\,;+\infty[\![$ ou $]\!]-\infty\,;n]\!]$.

1.2 Inclusion

Définition 1.3 (inclusion large et inclusion stricte d'un ensemble dans un autre)

Soient A et B des ensembles.

1. On dit que A est inclus dans B, ce que l'on note « $A \subset B$ », lorsque tous les éléments de A sont aussi des éléments de B, c'est-à-dire : $\forall x \in A,\, x \in B$.
   Dans ce cas, on dit que A est une partie ou un sous-ensemble de B.
2. On dit que A est strictement inclus dans B, ce que l'on note « $A \subsetneq B$ », lorsque $A \subset B$ et $A \neq B$.

Attention ! Ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$:
- un élément $\in$ un ensemble ;
- un ensemble $\subset$ un autre ensemble.

Remarques :
1. Dire que deux ensembles A et B sont égaux signifie que $A \subset B$ et $B \subset A$, ou encore :
   $(\forall x \in A,\, x \in B)$ et $(\forall x \in B,\, x \in A)$.
2. Dire que deux ensembles A et B sont différents signifie donc : ...

Exemples 1.4 :
- $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$
- $\mathbb{R}_+ \subsetneq \mathbb{R}$
- $\{1\} \subsetneq \{1; 2\}$
- L'ensemble vide est inclus dans n'importe quel ensemble.

Méthode 1 : *Pour montrer une inclusion $A \subset B$, on fixe un élément quelconque dans A (« soit $x \in A$ ») et on montre qu'il appartient à B.*

Méthode 2 : *Pour montrer une inclusion stricte $A \subsetneq B$, on montre l'inclusion large $A \subset B$, puis on exhibe (au moins) un élément qui est dans B mais pas dans A.*

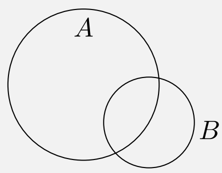
Exemple 1.5 : Montrer que $\mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q}$.

Méthode 3 : *Pour montrer une égalité entre deux ensembles A et B :*
- *soit on procède par double inclusion (on montre séparément chacune des deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$) ;*
- *soit on montre directement que l'équivalence $x \in A \iff x \in B$ est vraie pour tout élément x.*

1.3 Opérations sur les ensembles

Définition 1.6 (intersection, réunion et différence de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles.
1. L'ensemble $A \cap B$, appelé <u>intersection</u> de A et B, est l'ensemble dont les éléments sont ceux qui sont dans A **et** dans B.
2. L'ensemble $A \cup B$, appelé <u>réunion</u> (ou <u>union</u>) de A et B, est l'ensemble dont les éléments sont ceux qui sont dans A **ou** dans B.
3. L'ensemble $A \backslash B$, appelé <u>différence</u> de A par B, est l'ensemble dont les éléments sont ceux qui sont dans A et qui ne sont pas dans B.

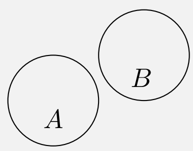


Vocabulaire : Les diagrammes comme ci-dessus sont appelés <u>diagrammes de Venn</u>.

Exemples 1.7 :
- $\{1\,;2\,;4\} \cap \{1\,;3\} = \dots$
  $\{1\,;2\,;4\} \cup \{1\,;3\} = \dots$
  $\{1\,;2\,;4\} \backslash \{1\,;3\} = \dots$
- $]1\,;\pi] \cap [2\,;+\infty[= \dots$
  $]1\,;\pi] \cup [2\,;+\infty[= \dots$
  $]1\,;\pi] \setminus [2\,;+\infty[= \dots$

Définition 1.8 (ensembles disjoints, union disjointe)

Soient A et B deux ensembles.
Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont <u>disjoints</u>.
On dit alors que l'union $A \cup B$ est une <u>union disjointe</u> et on la note $A \sqcup B$.



Attention : Il ne faut pas confondre *disjoints* ($A \cap B = \varnothing$) et *distincts* ($A \neq B$).

Proposition 1.9 (associativité et distributivité)

Soient A, B et C trois ensembles.

1. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité de l'intersection)
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité de la réunion)
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$)
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$)

Définition 1.10 (complémentaire)

Soit E un ensemble, et soit A une partie de E.
Le complémentaire de A (dans E) est l'ensemble $E \backslash A = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$.
On le note aussi $\overline{A}$, A^c ou $\complement_E^A$.

Exemple 1.11 : $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$: ensemble des nombres irrationnels.

Proposition 1.12 (expression d'une différence et complémentaire d'une intersection/réunion)

Soit E un ensemble, et soient A, B des parties de E.

1. $A \backslash B = A \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

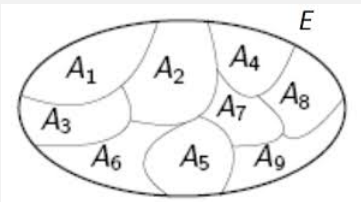
Définition 1.13 (recouvrement d'un ensemble)

Soient E et F deux ensembles et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F.
On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme un recouvrement de E lorsque $E \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Définition 1.14 (partition d'un ensemble)

Soient E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E.
On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de E lorsque :

- les ensembles sont non vides : $\forall i \in I$, $A_i \neq \varnothing$
- ils sont deux à deux disjoints : $\forall i,j \in I, i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
- leur union est l'ensemble E : $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = E$.



Exemple 1.15 : Prenons $E = \mathbb{N}$. Déterminer une famille composée de 3 éléments qui forme une partition de $\mathbb{N}$.

Remarque : Si nous voulons démontrer une propriété de la forme « $\forall x \in E$, $P(x)$ », nous pourrons utiliser une partition $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E et démontrer la propriété indépendamment pour chaque ensemble A_i.

Définition 1.16 (produit cartésien)

Soient A et B deux ensembles.
Le produit cartésien de A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble défini par :

$$A \times B = \{(a,b) \ / \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Un élément de la forme (a,b) est appelé un couple. Lorsque $A = B$, on peut noter A^2 au lieu de $A \times A$.

Exemples 1.17 :

- $\{0\,;1\} \times \{1\,;2\,;3\} =$
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y)\ /\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ s'identifie à l'ensemble des points du plan, grâce aux coordonnées cartésiennes dans un repère.

Remarque : Il est équivalent d'écrire « $(a,b) \in A \times B$ » et « $a \in A$ et $b \in B$ ».

On définit de même le produit cartésien de n ensembles (pour n'importe quel entier $n \geqslant 2$), dont les éléments sont appelés n-uplets (triplets pour $n = 3$, quadruplets pour $n = 4$, quintuplets pour $n = 5$, etc.).
Par exemple, $\mathbb{R}^3$ s'identifie à l'ensemble des points de l'espace.

Définition 1.18 (ensemble des parties)

Soit E un ensemble.
L'ensemble des parties de E (c'est-à-dire l'ensemble dont les éléments sont les parties de E) est noté $\mathcal{P}(E)$.

Autrement dit : $\mathcal{P}(E) = \{A\ /\ A \subset E\}$.

Exemples 1.19 :

- $\mathcal{P}\big(\{1\,;2\,;3\}\big) = \dots$
- $\mathcal{P}\big(\{0\}\big) = \dots$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \dots$

Remarque : Il est équivalent d'écrire « $A \in \mathcal{P}(E)$ » et « $A \subset E$ ».

2 Applications

2.1 Vocabulaire général

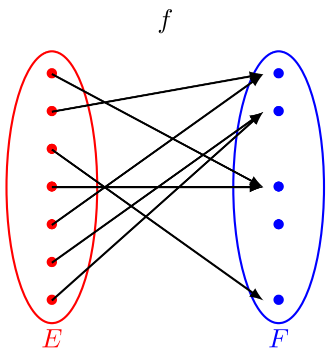
Définition 2.1 (fonction ou application)

Une application (ou fonction) f est la donnée :

1. d'un ensemble de départ E, aussi appelé ensemble de définition, supposé non vide ;
2. d'un ensemble d'arrivée F, également supposé non vide ;
3. pour chaque élément x dans l'ensemble de départ E, d'un unique élément y dans l'ensemble d'arrivée F, appelé image de x par f, et noté $f(x)$.

On note $f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et on dit que f est une application de E dans F.
L'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E.

Remarque : Il est quelques fois utile d'utiliser *une représentation patatoïdale* des applications.



Définition 2.2 (antécédent)

Soit $f : E \to F$, et soit y un élément de l'ensemble d'arrivée F.
Un antécédent de y par f est un élément x de l'ensemble de départ E dont l'image par f est y, c'est-à-dire tel que $f(x) = y$.

Définition 2.3 (graphe d'une application)

Soit $f : E \to F$.
Le graphe de f est la partie de $E \times F$ suivante : $\big\{\big(x,f(x)\big) \ / \ x \in E\big\} = \{(x,y) \in E \times F \ / \ y = f(x)\}$.

Définition 2.4 (composition de deux applications)

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ (avec l'ensemble d'arrivée de f qui est l'ensemble de départ de g).
La composée de f par g est l'application, notée $g \circ f$, définie par

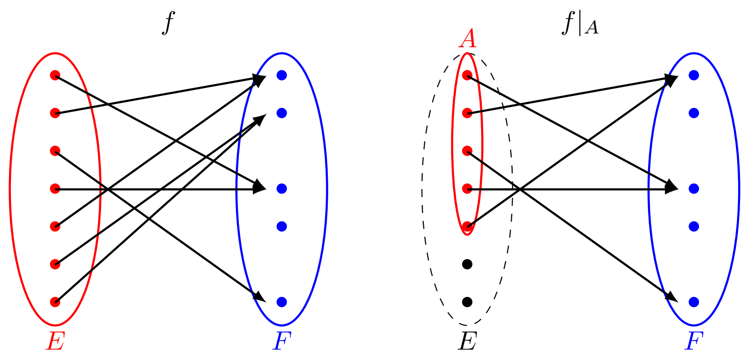
$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$$

Remarque : On peut en fait définir $g \circ f$ dès que la condition suivante est vérifiée : pour tout x dans l'ensemble de départ de f, $f(x)$ appartient à l'ensemble de départ de g.

Définition 2.5 (restriction d'une application)

Soit $f : E \to F$, et soit A une partie non vide de E.
On appelle restriction de f à A l'application suivante, notée $f|_A$:

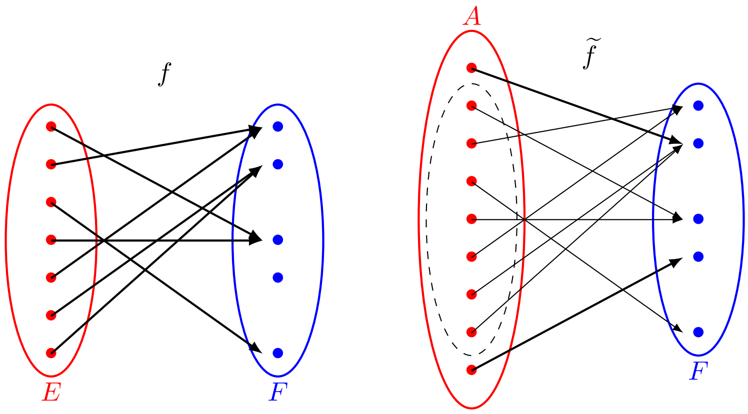
$$f|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$



Définition 2.6 (prolongement d'une application)

Soit $f : E \to F$, et soit un ensemble A tel que $E \subset A$.
On appelle prolongement de f sur A toute application $\widetilde{f} : A \to F$ telle que $\widetilde{f}|_E = f$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \ \widetilde{f}(x) = f(x)$$



2.2 Applications particulières

2.2.1 Suites

Définition 2.7 (suite)

Une suite est une application dont l'ensemble de départ est de la forme $[\![n_0\,;+\infty[\![$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
L'entier n_0 est appelé rang initial de la suite.

Pour une suite a de rang initial n_0, on note :
- a_n l'image d'un entier n, appelé terme de rang n de la suite ;
- $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ la suite.

2.2.2 Familles

La notion de famille généralise celle de suite.

Définition 2.8 (famille)

Soit I un ensemble non vide.
Une famille indexée par I est une application dont l'ensemble de départ est I.

Pour une famille a indexée par I, on note :
- a_i l'image d'un élément $i \in I$, appelé élément d'indice i de la famille ;
- $(a_i)_{i\in I}$ la famille.

Remarque : Se donner une famille $(a_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ indexée par l'ensemble $[\![1\,;n]\!]$ revient à se donner un n-uplet $(a_1\,,\dots,a_n)$. On ne fera pas la distinction entre ces deux types d'objets.

Notation

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. On note :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \left\{x \in E \ /\ \exists i \in I,\, x \in A_i\right\} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \left\{x \in E \ /\ \forall i \in I,\, x \in A_i\right\}$$

Exemple 2.9 : Déterminer $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[1;1+\frac{1}{n}\right[$ et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[1;1+\frac{1}{n}\right[$.

2.2.3 Fonction identité

Définition 2.10 (fonction identité d'un ensemble)

Soit E un ensemble non vide.
L'identité de E est la fonction suivante, notée id_E :

$$\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

2.2.4 Fonctions indicatrices

Définition 2.11 (fonction indicatrice d'une partie)

Soit E un ensemble, et soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
La fonction indicatrice de A (relativement à l'ensemble E) est la fonction suivante, notée $\mathbb{1}_A$:

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Remarque : Cette application permet de traduire l'appartenance à la partie A :

$$\forall x \in E, \left(x \in A \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 1 \right)$$

Exemple 2.12 : Tracer une représentation de la courbe de $\mathbb{1}_{[0;1]\cup[2;3]}$.

2.3 Propriétés des applications : injectivité, surjectivité, bijectivité

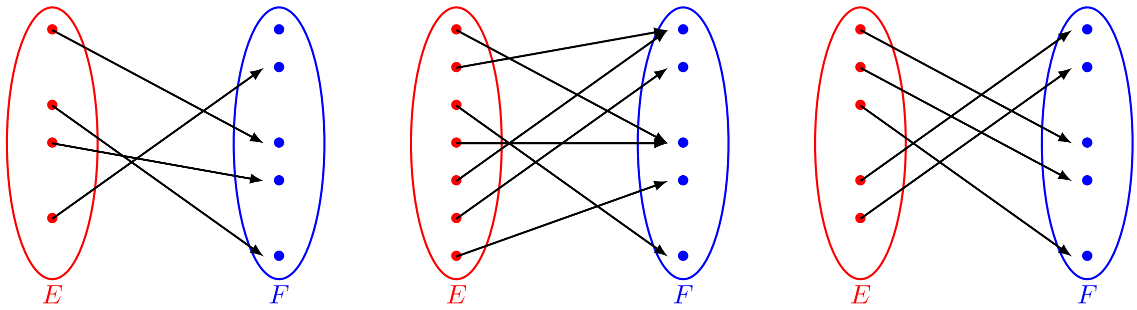
Définition 2.13 (application injective, surjective, bijective)

Une application est dite :
- injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet **au plus** un antécédent ;
- surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet **au moins** un antécédent ;
- bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet **exactement** un antécédent (c'est-à-dire si elle est à la fois injective et surjective).

Vocabulaire : Une application injective est aussi appelée injection, etc.

Illustration à l'aide de représentations patatoïdales de fonctions de E dans F :

injection non surjective surjection non injective bijection



Écriture avec des quantificateurs : Soit $f : E \to F$.

1. f injective $\iff \dots$
2. f surjective $\iff \dots$
3. f bijective $\iff \dots$

Exemple 2.14 : Montrer que $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x+3 \end{array}$ est bijective.

Proposition 2.15 (composée de deux applications injectives, surjectives, bijectives)

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. (On peut donc considérer la composée $g \circ f : E \to G$.)

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Bijection réciproque

Définition 2.16 (réciproque d'une bijection)

Soit $f : E \to F$ une bijection.
La bijection réciproque de f est la fonction, notée f^{-1}, qui est définie par :

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}$$

Remarques :

1. Si f est une bijection, alors f^{-1} est aussi une bijection et la réciproque de f^{-1} est f.
2. Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

Proposition 2.17 (réciproque d'une composée de deux bijections)

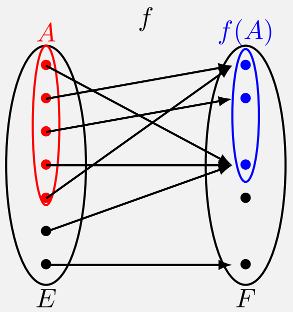
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections.
La bijection réciproque de la composée $g \circ f : E \to G$ est la fonction $f^{-1} \circ g^{-1} : G \to E$.
Autrement dit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.4 Image directe et image réciproque

Définition 2.18 (image directe d'une partie par une fonction)

Soit $f : E \to F$, et soit A une partie de l'ensemble de départ E.
L'image directe de A par f est le sous-ensemble de F, noté $f(A)$, défini par :

$$f(A) = \{f(x) \;/\; x \in A\} = \{y \in F \;/\; \exists x \in A, y = f(x)\}$$



Cas particulier : on appelle image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble $f(E) = \{f(x) \;/\; x \in E\}$ (ensemble des valeurs prises par la fonction f).

Attention ! Ne pas confondre l'ensemble d'arrivée avec l'image de la fonction : l'ensemble d'arrivée contient $\mathrm{Im}(f)$, mais l'égalité des deux ensembles n'est pas nécessairement vérifiée.

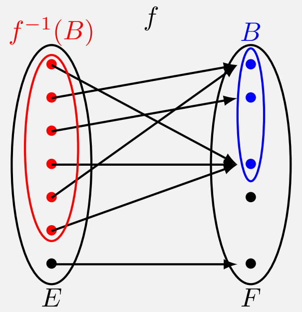
Exemple 2.19 : Déterminer $\exp\left(]-\infty;0[\right)$.

Remarque : Une fonction est surjective si et seulement si son image est égale à son ensemble d'arrivée.

Définition 2.20 (image réciproque d'une partie par une fonction)

Soit $f : E \to F$, et soit B une partie de l'ensemble d'arrivée F.
L'image réciproque de B par f est le sous-ensemble de E, noté $f^{-1}(B)$, défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}$$



Il est donc équivalent d'écrire $x \in f^{-1}(B)$ et $f(x) \in B$.

Exemple 2.21 : Soit $f : x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}([1;2])$.

Remarque : L'image réciproque de l'ensemble d'arrivée est toujours égale à l'ensemble de départ.

Cas particulier : L'image réciproque d'un singleton $\{y\}$ est l'ensemble des antécédents de y.

Remarque : Le fait de noter $f^{-1}(B)$ pour une image réciproque ne signifie pas que la fonction réciproque f^{-1} existe (seulement lorsque f est bijective).

Proposition 2.22 (coïncidence des deux notations $f^{-1}(B)$ lorsque la fonction f^{-1} existe)

Soit $f : E \to F$ une bijection, et soit B une partie de F.
Les deux ensembles suivants sont égaux :

- l'image réciproque de B par la fonction f ;
- l'image directe de B par la fonction f^{-1}.

Il n'y a donc pas d'ambiguïté sur la notation $f^{-1}(B)$ lorsque la fonction f^{-1} existe.

Proposition 2.23 (stabilité de l'inclusion par l'image directe et réciproque)

Soit $f : E \to F$, soient A et A' des parties de E, et soient B et B' des parties de F.

1. Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.
2. Si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

Remarque : Il n'y a pas de raison pour que A et $f^{-1}(f(A))$ soit le même ensemble. Voici un contre-exemple.